任意の伝達関数の逆伝達関数を作成する方法

１．基本的なアイデア

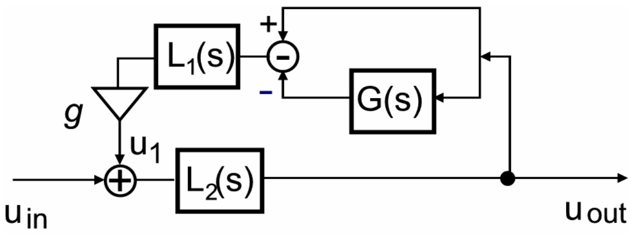

図１

実際の系では一般に伝達関数は複雑であり、その逆伝達関数を、式を参考に回路で実現することは容易ではない。そこで、与えられた任意の伝達関数に対する逆伝達関数を容易に回路で実現できれば、様々な局面で大変便利である。実際の系の伝達関数を $R(s)$とし、その模擬系の伝達関数を $G(s)$とする。

図１の回路（逆伝達関数作成回路と呼ぶことにする）の入出力関係は

$$u_{out}=\left(u_{in}+u_1\right)L_2\left(s\right)$$

$$u_1=u_{out}\left(1-G\left(s\right)\right)L_1\left(s\right)g$$ より、

$$u_{out}=\left[u_{in}+u_{out}\left(1-G\left(s\right)\right)L_1\left(s\right)g\right]L_2\left(s\right)$$

従って、

$$u_{out}=M\left(s\right)u_{in} \qquad M\left(s\right)\equiv\frac{L_2\left(s\right)}{1+\left(G\left(s\right)-1\right)g\,L_1\left(s\right)L_2\left(s\right)} \qquad (1)$$

ここで、g=1、$L(s)$=1 とすると、M(s)=1/$G(s)$となる。わざわざ g や $L(s)$を加えたのには理由がある。実際の回路系ではアンプの遅れがあるので、それを $L(s)$で表した。実は上の回路は遅れがあると発振する。従って、g=1 にすることはできない。従って、１回の逆伝達操作では帯域は大きく伸びない。そこで、図１の回路の出力に G(s)を繋げたものを新たに模擬系として、それに対する逆伝達関数を作ることを繰り返すことにより、徐々に理想系に近づけていくことができる。

例えば、３回繰り返す場合には、図２のように図１の回路を直列につなげばよい。

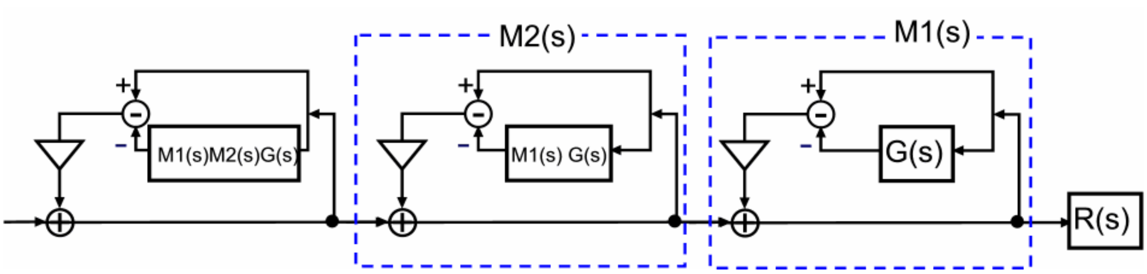

図２

図２で青い線で囲んだ部分が１回の逆伝達関数操作 M1(s)と２回の逆伝達関数操作 M2(s)であり、それと同じものが左ふたつの逆伝達関数作成回路のなかに含まれている。M1(s)と M2(s)の回路を別に作成し、それを逆伝達関数作成回路の中に組み込む必要は必ずしもない。図３のようにしても同じ結果が得られる。

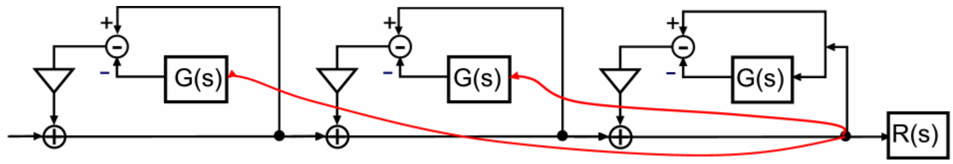

図３

それぞれの逆伝達関数操作で模擬系 G(s)を作成するのは面倒であるが、２回までの逆伝達関数操作ならば、図４のように単純化できる。

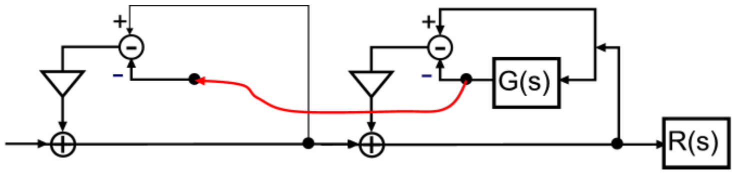

図４

逆伝達操作を重ねていくと位相遅れが蓄積していく場合には、各逆伝達操作の出力に（１＋微分）を加える。この場合には図５のようにすればよい。

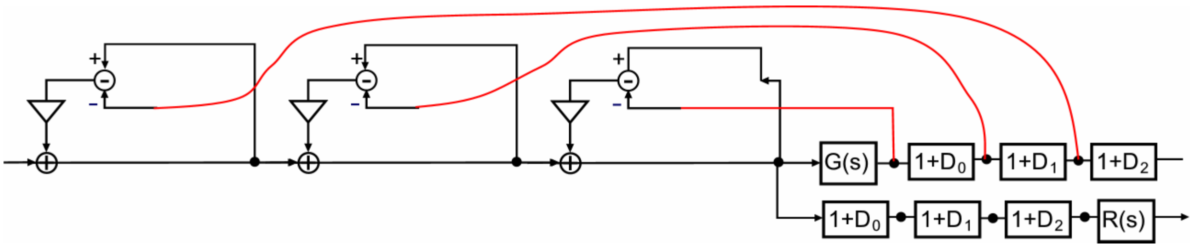

図５

２．効果の例

２－１．１次ローパスフィルター特性を持つ伝達関数の補償

$$R(s)=G(s)=\frac{1}{1+s/\omega_0} \qquad (2)$$

式(2)の伝達関数をもつ系を考える。この逆伝達関数は（１＋微分）であるので上記のようなことをしなくても簡単に逆伝達関数を作れそうに思われるが、実際には簡単ではない。例えば、$\omega_0 = 2\pi \times 10$ kHz とし、これを数百 kHz ないしは 1MHz までの帯域まで伸ばそうとすると、この微分のゲインはその周波数帯域で数十倍～百倍必要になり、実際にこの微分回路を作ることはできない。図１に示す回路を１段だけ使った場合のシミュレーション結果を図６に示す。

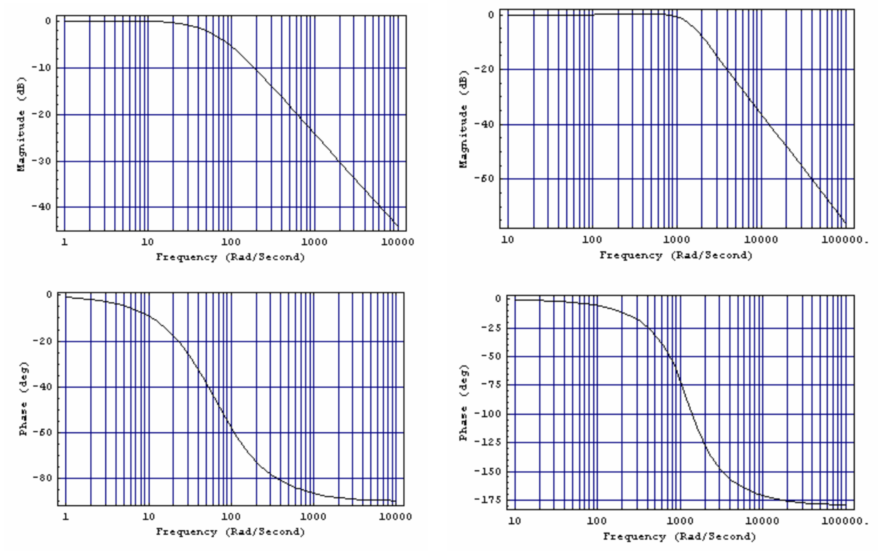

図６：左は元の伝達関数(10kHz のローパス)。右は補償後。アンプの帯域を 4MHz とし、ゲイン g を 0.94 とした。この逆伝達補償は発振しない。１回の補償で 110kHz まで帯域が伸びている。

補償後の Bode 線図の位相スペクトルを見ると、位相が速く回っており、１次からおおよそ２次のローパスになっていることが分かる。従って、更に逆伝達操作を加えていくと、位相回りが大きくなっていき、発振する可能性がある。それ故、逆伝達操作した信号を（１＋微分）回路に通して位相回りを遅くする工夫が必要である。だが、この微分のゲインは小さくてよいので、（１＋微分）だけで逆伝達関数を作るよりずっと簡単である。図７に、この（１＋微分）を加えた逆伝達関数操作を２回施した場合の結果を示す。

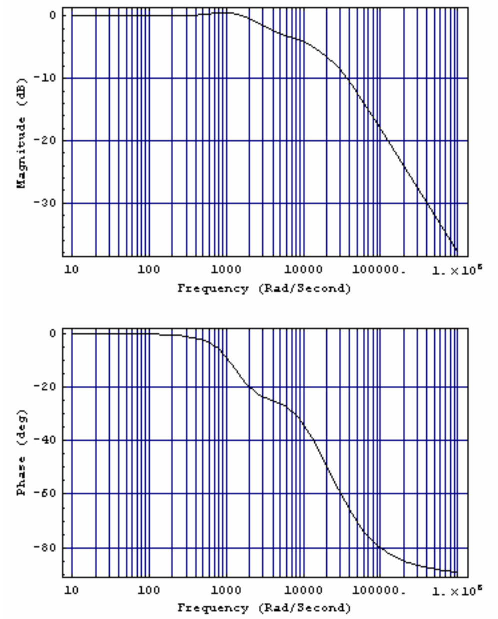

図７　（１＋微分）と逆伝達関数操作を２回行ったときの結果。ゲインが 3dB 落ちる周波数で見ると数百 kHz、位相が 45 度遅れる周波数でみると 1.7MHz くらいまで帯域が伸びている。使ったパラメータは以下の通り。

１回目の微分周波数　260kHz
２回目の微分周波数　300kHz
１回目の逆伝達操作のゲイン　0.92
２回目の逆伝達操作のゲイン　0.24
アンプの帯域(L1[s]のみ考慮)　4MHz

２－２．Ｚスキャナーの逆伝達関数補償

新しい逆伝達関数補償法の最大の特徴は補償すべき伝達関数の形がどのようなものであっても逆伝達関数を作成できるという点にある。例えば、Ｚスキャナーのように、ピークがいくつかあるような伝達関数の逆伝達関数は極めて複雑であり、通常の逆伝達関数補償方式ではそれを回路で実現することは実際上不可能である。Ｚスキャナーの伝達関数は３つの並列２次ローパスフィルターで近似されるが、この補償がどこまでできるかを以下に示す。

　この伝達関数をそのまま逆伝達操作にかけるよりもＱ値制御によりＱ値を小さくしてから操作した方が効率がよかった。図８にＱ値制御前（左）・後（右）の伝達関数を示す。

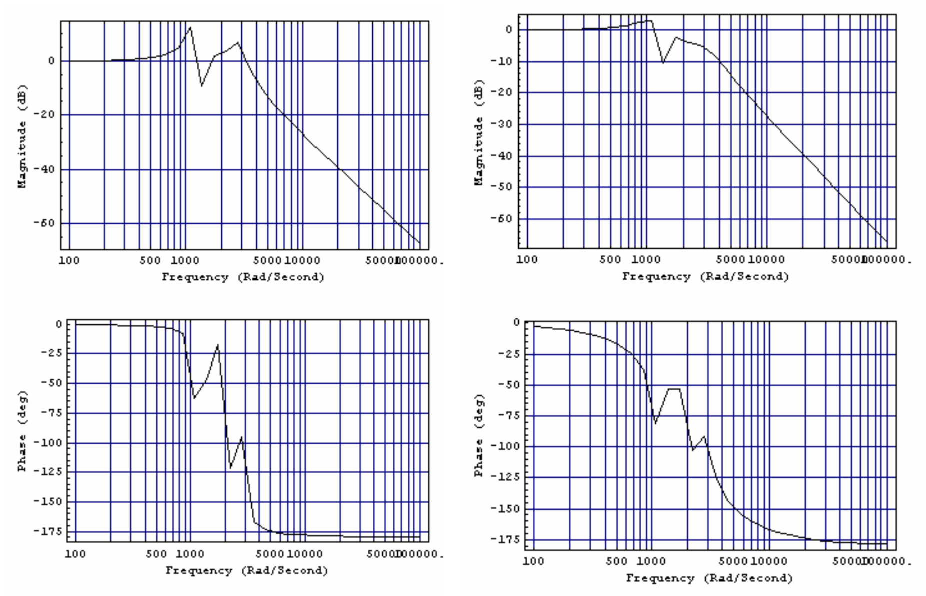

図８　Ｚスキャナーの伝達関数。175kHz(Q=10), 350kHz(Q=10), 430kHz(Q=7)の２次ローパスフィルターが 4:3:3 で並列になったもの。350kHz でゲイン１となる微分によりＱ値制御を行った（右図）。

逆伝達操作を４回行うと、図９のような伝達関数になった。位相が９０度遅れる周波数は約 800kHz にまでなっている。更に逆伝達操作を繰り返すと、ゲインは伸びるが、位相はあまり伸びない。

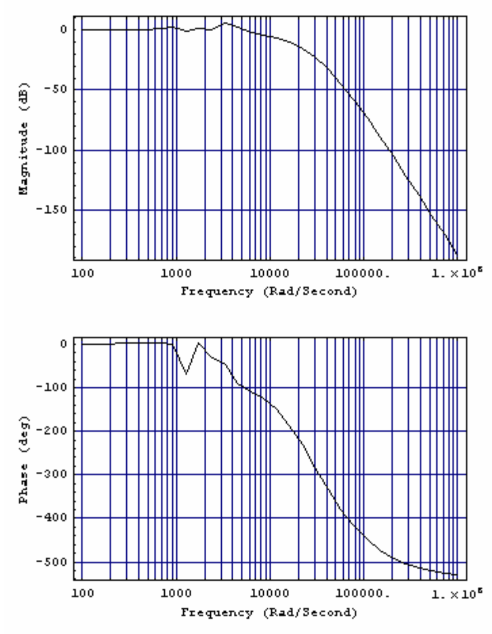

図９　４回逆伝達操作を繰り返したＺスキャナーの伝達関数。用いたパラメータは以下の通り。

ローパスフィルタ L2[s]：4MHz、アンプ帯域 4MHz

微分周波数

$\omega_{D1} = 2\pi * 500;$

$\omega_{D2} = 2\pi * 900;$

$\omega_{D3} = 2\pi * 1200;$

$\omega_{D4} = 2\pi * 1800;$

ゲイン

$K_1 = 0.4;$

$K_2 = 0.1;$

$K_3 = 0.03;$

$K_4 = 0.01;$

３．効用と限界

機械系の帯域を上げることは特に難しい。帯域を倍に上げるだけでも相当な努力と工夫が必要で実際には無理ということも多い。上記の逆伝達関数補償法は、倍程度ならば比較的容易にでき、Ｚスキャナーやカンチレバーの帯域を上げるのに大変有効な方法である。ひとつ問題になるのは、Ｚスキャナーやカンチレバーのドライブ電源の帯域である。逆伝達操作が大きなゲインを出力してもドライバー電源の方でゲインが飽和してしまう場合が有り得る。